曲面絡み目の結び目群と結び目対称カンドルの特徴付けについて

大阪大学　大学院理学研究科　数学専攻
安田順平 (Jumpei YASUDA) *

概要

絡み目の補空間の基本群を結び目群という。与えられた群がある絡み目の結び目群となる必要十分条件は、絡み目のブレイド表示を用いることで与えられる。曲面絡み目とは 4 次元空間内へ滑らかに埋め込まれた閉曲面である。本講演では、与えられた群が曲面絡み目の結び目群となるための必要十分条件（特徴付け）について紹介する。さらに、結び目対称カンドルにおける特徴付けも併せて紹介する。

1　導入

結び目 K の補空間の基本群 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ を結び目群という。結び目理論において、結び目群は結び目や絡み目の分類において重要な働きをしている。自然な問題として「与えられた群がいつ結び目群となるか？」が挙げられる。この問題に関する結論の 1 つとして、次の Alexander-Artin の定理が知られている。

定理 1.1 ([1])**.** 群 G が絡み目の結び目群であるための必要十分条件は、あるブレイド $b \in B_m$ が存在して G が次の群表示を持つことである：

$$\left\langle x_1, \ldots, x_m \,\middle|\, x_i = b \cdot x_i \quad (i = 1, \ldots, m) \right\rangle.$$

ここで、$b \cdot x$ はブレイド群 B_m による自由群 F_m への作用である（$b \in B_m, x \in F_m$）。この定理は、「全ての絡み目があるブレイドの閉包として表すことができる」という事実を元に証明される。

曲面結び目とは 4 次元空間 $\mathbb{R}^4$ へ滑らかに埋め込まれた連結な閉曲面であり、曲面結び目の非交和を**曲面絡み目**という。González-Acuña [3] と Kamada [5] は、向き付け可能な曲面絡み目の結び目群について、独立に特徴付けを与えた。ここでは Kamada による特徴付けを紹介する。整数 $m \geq 1$ と m-ブレイド $b_1, \ldots, b_n \in B_m$ に対して、次の群表示を $b_1, \ldots, b_n$ **に付随した** (m,n)**-表示** (もしくは単に (m,n)**-表示**) という：

$$\left\langle x_1, \ldots, x_m \,\middle|\, b_i \cdot x_1 = b_i \cdot x_2 \quad (i = 1, \ldots, n) \right\rangle.$$

* E-mail:u444951d@ecs.osaka-u.ac.jp

また $b_1, \ldots, b_n$ に付随した (m,n)-表示が**境界条件**を満たすとは、以下を満たす $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ が存在することをいう：

$$\prod_{i=1}^{n} b_i^{-1} \sigma_1^{\varepsilon_i} b_i = 1_m,$$

ここで $\sigma_i \in B_m$ は Artin の標準的な生成元であり、1_m はブレイド群の単位元である。

定理 1.2 ([5]). 群 G が c-成分で種数 g の向き付け可能な曲面絡み目の結び目群であるための必要十分条件は、以下を満たす整数 $m, n \geq 0$ が存在することである。

(1) G は境界条件を満たす (m,n)-表示を持つ。
(2) 等式 $2c - 2g = 2m - n$ が成り立つ。
(3) $G/[G,G]$ はアーベル群 $\mathbb{Z}^c$ に同型である.

特に、群 G が（成分数などを問わない）向き付け可能な曲面絡み目の結び目群となるための必要十分条件は (1) を満たすことである。この定理は、「向き付け可能な曲面絡み目が 2 次元ブレイドの閉包として表すことができる」という事実を用いて証明される。

本稿では、上記の定理を向き付け可能性に関わらない一般の曲面絡み目へ拡張する。

整数 $m \geq 1$ とブレイド $b_1, \ldots, b_n \in B_{2m}$ に対して、次の群表示を $b_1, \ldots, b_n$ に付随した $(2m,n)$-表示 **with inverses** であるという：

$$\left\langle x_1, \ldots, x_{2m} \,\middle|\, b_i \cdot x_1 = b_i \cdot x_2,\ x_{2j-1} = x_{2j}^{-1} \quad (i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m) \right\rangle,$$

また (m,n)-表示が**弱境界条件**を満たすとは、以下を満たすような符号 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ が存在することをいう：

$$\prod_{i=1}^{n} b_i^{-1} \sigma_1^{\varepsilon_i} b_i \in K_{2m},$$

ここで K_{2m} は Hilden 部分群と呼ばれるブレイド群 B_{2m} の部分群である。曲面絡み目 F が (c,d) **成分**であるとは、F の連結成分が c 個の向き付け可能な曲面と d 個の向き付け不可能な曲面からなるときをいう。そして、(c,d) 成分の曲面絡み目 F の種数 (non-orientable genus) とは $\chi(F) = 2(c+d) - g$ を満たす整数 g を意味する。そして、次が主結果である。

定理 1.3. 群 G が (c,d) 成分で種数 g の曲面絡み目の結び目群であるための必要十分条件は、ある整数 $m, n \geq 0$ が存在して G が次を満たすことである。

(1) G は弱境界条件を満たす $(2m,n)$-表示 with inverses を持つ。
(2) 等式 $2(c+d) - g = 2m - n$ が成り立つ。
(3) $G/[G,G]$ はアーベル群 $\mathbb{Z}^c \oplus (\mathbb{Z}/2)^d$ と同型である。

特に、群 G が（成分数などを問わない）曲面絡み目の結び目群となるための必要十分条件は (1) を満たすことである。

本稿では、定理 1.3 で重要な役割をしている曲面絡み目のプラット表示について概説する。また、定理 1.3 の拡張として、結び目対称カンドルに対する同様の特徴付け（定理 3.5）を紹介し、その応用（定理 3.6）を述べる。

2 ブレイド状曲面のプラット閉包

2.1 ブレイドとブレイド状曲面

本稿を通して、$m \geq 1$ と $n \geq 0$ を正の整数、$I = [0, 1]$ は閉区間、D^2 と B^2 は $\mathbb{R}^2$ 内の 2 次元円板、そして $X_m = \{1, \ldots, m\}$ は D^2 内の直線上に $x_1, \ldots, x_m$ の順に並ぶ内点とする。$p : D^2 \times I \to I$ を第 2 成分への射影とする。このとき、**m-ブレイド**とは $D^2 \times I$ 内の β であって次を満たすものである：

(1) 制限写像 $p|_\beta : \beta \to I$ は次数 m の被覆写像である。
(2) $\partial\beta = X_m \times \partial I$ が成り立つ。

2 つの m-ブレイドが**同値**であるとは、境界を固定する $D^2 \times I$ のアイソトピーによって移り合うときをいう。次数 m のブレイド群 B_m を D^2 上の m 点配置空間 C_m の基本群 $\pi_1(C_m, X_m)$ として定める。すると、m ブレイドの同値類とブレイド群 B_m の元の間には自然な全単射が存在する。

$\mathrm{pr}_2 : D^2 \times B^2 \to B^2$ を第 2 成分への射影とする。また B^2 の基点 y_0 を ∂B^2 上から取り固定する。このとき、次数 m の（**基点付き**）**ブレイド状曲面** [8] とは $D^2 \times B^2$ 内のコンパクト曲面 S であって次を満たすものである：

(1) 制限写像 $\pi_S := \mathrm{pr}_2|_S : S \to B^2$ は次数 m の分岐被覆写像である。
(2) $S \cap D^2 \times \{y_0\} = X_m \times \{y_0\}$ が成り立つ。

特に、ブレイド状曲面 S が次数 m の **2 次元 m-ブレイド** [9] であるとは $\partial S = X_m \times \partial B^2$ を満たすものことをいう。本稿では、ブレイド状曲面といえば**単純**であると仮定する。すなわち、任意の点 $y \in B^2$ に対して $\#\pi_S^{-1}(y) \in \{m, m-1\}$ が成り立つことを仮定する。2 つのブレイド状曲面が**同値**であるとは、次を満たすような $D^2 \times B^2$ のアイソトピー $\{\Phi_t\}_{t\in[0,1]}$ と B^2 のアイソトピー $\{\phi_t\}_{t\in[0,1]}$ が存在することをいう：

(1) 任意の $t \in [0, 1]$ に対して、$\phi_t \circ \mathrm{pr}_2 = \mathrm{pr}_2 \circ \Phi_t$ が成り立つ。
(2) 任意の $t \in [0, 1]$ に対して、$\Phi_t|_{D^2\times\{y_0\}} = \mathrm{id}$ が成り立つ。

2.2 ブレイド状曲面のプラット閉包

本節では適切なブレイド状曲面に対してプラット閉包を導入する。

ウィケット [2] とは、$D^2 \times I$ 内に埋め込まれた半円周 w であって ∂w は $D^2 \times \{0\}$ と垂直に交わっているものである。**m-ウィケット配置**と言えば互いに交わらないウィケットの非交和とする。そして、m-ウィケット配置 w_0 を $\partial w_0 = X_{2m}$ かつ各ウィケットの境界が $\{x_{2j-1}, x_{2j}\}$（$i = 1, 2, \ldots, m$）となるものとして定める。また m-ウィケット配置全体からなる空間を $\mathcal{W}_m$ とする。そして $\mathcal{W}_m$ 内のループ $f : (I, \partial I) \to (\mathcal{W}_m, w_0)$ に対して、$(2m)$-ブレイド β_f を次で定義する：

$$\beta_f = \bigcup_{t\in I} \partial f(t) \times \{t\} \subset (D^2 \times \{0\}) \times I = D^2 \times I.$$

このとき、ブレイド β が**適切**であることを $\beta=\beta_f$ を満たすループ $f:(I,\partial I)\to(\mathcal{W}_m,w_0)$ が存在することとして定義する。

Hilden 部分群 K_{2m} を次の表示をもつ B_{2m} の部分群として定める：

$$K_{2m} \;=\; \left\langle \sigma_1, \sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2, \sigma_{2k}\sigma_{2k-1}\sigma_{2k+1}^{-1}\sigma_{2k}^{-1} \;\middle|\; k\in\{1,\ldots,m-1\} \right\rangle.$$

Brendle-Hatcher[2] は K_{2m} が適切な $(2m)$-ブレイドの同値類からなる部分群であることを示した。

本節において、B^2 と複素平面上の単位円板 $\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\le 1\}$ を同一視し、$y_0=1$ とする。また $\mathrm{pr}_1: D^2\times B^2\to D^2$ を第 1 成分への射影とする。次数 m のブレイド状曲面 S に対して、m-ブレイド β_S を次で定める：

$$\beta_S=\bigcup_{t\in I}\mathrm{pr}_1(\pi_S^{-1}(e^{2\pi\sqrt{-1}t}))\times\{t\}\subset D^2\times I.$$

定義より β_S の閉包は ∂S である。ブレイド状曲面 S が**適切**であるとは β_S が適切であることをいう。適切なブレイド状曲面の次数は偶数であり、偶数次数の 2 次元ブレイドは全て適切である。

以下では、次数 $2m$ の適切なブレイド状曲面 S に対してプラット閉包を定義する。閉区間 J_t を $J_t=\{re^{2\pi it}\in\mathbb{C} \mid r\in[1,2]\}$（$t\in[0,1]$）とする。但し $J_0=J_1$ であり、和集合 $\cup_{t\in I}J_t$ は $\mathbb{C}$ 上のアニュラスである。S は適切であるため、あるループ $f:(I,\partial I)\to(\mathcal{W}_m,w_0)$ が存在して $\beta_S=\beta_f$ が成り立つ。そこで $w_t=f(t)$ を $D^2\times J_t$ 内の m-ウィケット配置であって $\partial w_t\subset D^2\times\{e^{2\pi it}\}$ となるものとする。そして w_t の和集合を $A_S=\cup_{t\in I}w_t$ とする。

定義 2.1. S の**プラット閉包** $\widetilde{S}$ を和集合 $S\cup A_S$ として定める。

命題 2.2 ([10])**.** 任意の曲面絡み目はある適切なブレイド状曲面のプラット閉包と全同位である。

命題 2.3 ([11])**.** S を次数 $2m$ の適切なブレイド状曲面、n を π_S の分岐点の個数とする。このときプラット閉包 $\widetilde{S}$ の結び目群は $(2m,n)$-表示 with inverses を持つ。

定理 1.3 は命題 2.3 を用いて証明される。

3　カンドルと対称カンドル

カンドル [4, 7] とは、空でない集合 Q とその上の二項演算 $*:Q\times Q\to Q$ の組であって次を満たすものである。

(Q1) 任意の $a\in Q$ に対して、$a*a=a$ が成り立つ。
(Q2) 任意の $a,b\in Q$ に対してある元 $c\in Q$ が一意的に存在して、$c*b=a$ を満たす。
(Q3) 任意の $a,b,c\in Q$ に対して、$(a*b)*c=(a*c)*(b*c)$ が成り立つ。

また**ラック**とは空でない集合 Q とその上の二項演算 $*$ の組であって (Q2) と (Q3) を満たすものである。カンドル準同型とは写像 $f:Q\to Q'$ であって $f(a*b)=f(a)*f(b)$（$a,b\in Q$）を満たすものをいう。特に、$S_b(a)=a*b$ によって定義される写像 $S_b:Q\to Q$ はカンドル同型写像となる。カンドル Q の**内部自己同型写像** $\mathrm{Inn}(Q)$ を S_b（$b\in Q$）によって生成される自己同型群の部分群として定める。

カンドル Q が**連結**であるとは、$\mathrm{Inn}(Q)$ による Q への自然な作用が推移的であることをいう。同様に、Q 内の $\mathrm{Inn}(Q)$ による作用の軌道を Q の**連結成分**という。カンドル $(Q,*)$ に対して、二項演算 $\bar{*}: Q\times Q \to Q$ を $a\bar{*}b := S_b^{-1}(a)$ として定めると、$(Q,\bar{*})$ はカンドルとなる。$\bar{*}$ を $*$ の**双対演算**という。

カンドル Q の**良い対合写像**とは対合写像 $\rho: Q\to Q$（つまり $\rho^2 = \mathrm{id}_Q$）であって $\rho(a*b) = \rho(a)*b$ と $a*\rho(b) = a\bar{*}b$ が任意の元 $a,b\in Q$ に対して成り立つことをいう。そして**対称カンドル**とはカンドルとその良い対合写像の組 (Q,ρ) をいう。また対称カンドル準同型といえばカンドル準同型 $f:(Q,\rho)\to(Q',\rho')$ であって $f\circ\rho = \rho'\circ f$ が成り立つことをいう。

例 3.1 (二面体カンドル)**.** 二面体カンドル R_n とは $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ であって二項演算として $a*b = 2b-a$ を持つものである。二面体カンドルの良い対合写像は Kamada-Oshiro[6] によって以下のように分類されている：

(1) $n\equiv 1,3 \mod 4$ のとき、R_n の良い対合写像は恒等写像 id のみである。
(2) $n\equiv 2 \mod 4$ のとき、R_n の良い対合写像は恒等写像 id または対蹠写像 ρ_A のいずれかである。ここで対蹠写像は $\rho_A(a) = a+n/2$ によって定まる。
(3) $n\equiv 0 \mod 4$ のとき、R_n の良い対合写像は恒等写像 id、対蹠写像 ρ_A、そして以下で定義される二種類の半対蹠写像 ρ_{HA}, ρ'_{HA} のいずれかである。

$$\rho_{HA}(a) = \begin{cases} a+n/2 & (a\text{: even}) \\ a & (a\text{: odd}) \end{cases}, \quad \rho'_{HA}(a) = \begin{cases} a & (a\text{: even}) \\ a+n/2 & (a\text{: odd}) \end{cases}.$$

例 3.2. カンドル $(Q,*)$ のコピーを $\overline{Q}$ とする。すると非交和 $D(Q) = Q\cup\overline{Q}$ 上の二項演算を以下で定めるとカンドルとなる：

$$a*\overline{b} := a\bar{*}b, \quad \overline{a}*b := \overline{a*b}, \quad \overline{a}*\overline{b} := \overline{a\bar{*}b}.$$

さらに $D(Q)$ の対合写像 $\rho(a) = \overline{a}$ は良い対合写像となる。このとき対称カンドル $(D(Q),\rho)$ を Q の**ダブル**という。

例 3.3 (結び目対称カンドル)**.** M を連結な $(n+2)$ 次元多様体、K を M へプロパーに埋め込まれた n 次元部分多様体とする。$N(K)$ を K の管状近傍、$E(K) = M\setminus \mathrm{Int}N(K)$ を K の外部、そして $*\in E(K)$ を基点とする。K の**投げ縄 (noose)** とは K の有向メリディアン円板 D と $E(K)$ 内の有向辺 α であって ∂D 上の点を始点に $*$ を終点とするものの組 (D,α) である（図 1）。$\widetilde{Q}(M,K)$ を K の投げ縄全体のホモトピー類からなる集合とする。そして $\widetilde{Q}(M,K)$ 上の 2 項演算を次で定める：

$$[(D,\alpha)]*[(D',\alpha')] = [(D,\alpha\cdot\alpha'^{-1}\partial D'\alpha')].$$

するとこの演算によって $\widetilde{Q}(K)$ はカンドルとなる。さらに、写像 $\rho:\widetilde{Q}(M,K)\to\widetilde{Q}(M,K)$ を $\rho([(D,\alpha)]) = [(-D,\alpha)]$ と定めると、これは良い対合写像となる。ここで $-D$ はメイリディアン円板 D であって向きを入れ替えたものである。この対称カンドル $(\widetilde{Q}(M,K),\rho)$ を**結び目対称カンドル**といい $X(M,K)$ または単に $X(K)$ と記す。

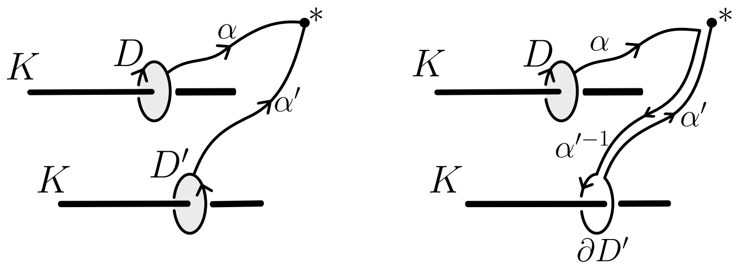

図 1　K の投げ縄（左）と結び目対称カンドルの演算（右）

次の対称カンドル表示を $2m$-ブレイド $b_1, \ldots, b_n \in B_{2m}$ に付随した **$(2m, n)$-表示 with inverses** であるという：

$$\left\langle x_1, \ldots, x_{2m} \,\middle|\, b_i \cdot x_1 = b_i \cdot x_2,\ x_{2j-1} = \overline{x_{2j}} \quad (i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m) \right\rangle_{\mathrm{sq}}.$$

また $2m$-ブレイド $b_1, \ldots, b_n \in B_{2m}$ に付随した $(2m, n)$-表示 with inverses が**弱境界条件**を満たすとは、次が成り立つ $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ が存在することをいう：

$$\prod_{i=1}^{n} b_i^{-1} \sigma_1^{\varepsilon_i} b_i \in K_{2m}.$$

命題 3.4 ([11])**.** 次数 $2m$ の適切なブレイド状曲面 S の分岐点の個数を n とする。このとき、プラット閉包 $\widetilde{S}$ の結び目対称カンドルは弱境界条件を満たす $(2m, n)$-表示 with inverses を持つ。

命題 3.4 を用いることで、次の主結果を得る。

定理 3.5. 対称カンドル (Q, ρ) が (c, d) 成分で種数 g の曲面絡み目の結び目対称カンドルであるための必要十分条件は次を満たす整数 $m, n \geq 0$ が存在することである：

(1) (Q, ρ) は弱境界条件を満たす $(2n, m)$-表示 with inverses を持つ。
(2) $2(c + d) - g = 2m - n$ が成り立つ。
(3) Q は $2c + d$ 個の連携成分 $X_1, \ldots, X_c,\ Y_1, \ldots, Y_c,\ Z_1, \ldots, Z_d$ から成り、各 $i \in \{1, \ldots, c\}$ と $j \in \{1, \ldots, d\}$ に対して $\rho(X_i) = Y_i$ と $\rho(Z_j) = Z_j$ を満たす。

さらに、定理 3.5 を適用することで次を得る。

定理 3.6. 任意の整数 $n \geq 1$ と任意の良い対合写像 $\rho : R_n \to R_n$ に対してある曲面絡み目 F が存在して、結び目対称カンドル $X(F)$ が (R_n, ρ) と同型になる。

参考文献

[1] James W. Alexander. A lemma on systems of knotted curves. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 9(3):93–95, 1923.

[2] Tara Brendle and Allen Hatcher. Configuration spaces of rings and wickets. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 88, 05 2008.

[3] F. González-Acuña. A characterization of 2-knot groups. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 10(2):221–228, 1994.

[4] D. Joyce. A classifying invariants of knots. *J. Pure. Appl. Alg.*, 23:37–65, 1982.

[5] Seiichi Kamada. A characterization of groups of closed orientable surfaces in 4-space. *Topology*, 33(1):113–122, 1994.

[6] Seiichi Kamada and Kanako Oshiro. Homology groups of symmetric quandles and cocycle invariants of links and surface-links. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362(10):5501–5527, 2010.

[7] S. Matveev. Distributive groupoids in knot theory. *Math. USSR-Sb*, 47:73–83, 1984.

[8] Lee Rudolph. Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids. *Comment. Math. Helv.*, 58(1):1–37, 1983.

[9] O.Ya. Viro. Lecture given at osaka city university. September 1990.

[10] Jumpei Yasuda. A plat form presentation for surface-links. *arXiv:2105.08634*, 2021.

[11] Jumpei Yasuda. Computation of the knot symmetric quandle and its application to the plat index of surface-links. *J. Knot Theory Ramifications*, 33(03):2450005, 2024.